高中數學延伸部分專責委員會 (照顧學習多樣性的強化措施)
所建議的簡易短題目示例

<u>单元二的簡易短題目</u>

1. 设 $y = e^{3x}$。从基本原理求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

2. (a) 利用数学归纳法，证明对所有正整数 n，

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$ 。

(b) 利用 (a)，计算 $3^3 + 6^3 + 9^3 + \cdots + 300^3$。

3. 设 n 为一正整数。$(1+3x)^n(1-2x)^2$ 的展开式中 x^2 的系数为 160。求
(a) n，
(b) 该展开式中 x^3 的系数。

4. (a) 利用代换积分法，求 $\int \frac{x}{e^{x^2}} \mathrm{d}x$ 。

(b) 在曲线 C 上任意点 (x, y)，C 的切线的斜率为 $\frac{3x}{e^{x^2}}$。若点 $(0,1)$ 在 C 上，求 C 的方程。

5. (a) 证明 $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)} = \tan\beta$。

(b) 假定对某些实数 x 及 y， $\sin(x+y) - 2\cos(x+y) = 2\cos(x-y) + \sin(x-y)$ 。利用 (a) ，或其他方法，求 $\tan 2y$ 的值。

6. 对所有$x \neq -1$，定义 $\mathrm{f}(x) = \frac{3x^2-x+2}{x+1}$ 。将 $y = \mathrm{f}(x)$ 的图像记为 C。求
(a) C 的渐近线，
(b) C 在 x 的坐标为 -2 的切线的方程。

7. 考虑曲线 C：$y = \cos x \sin 2x$，其中 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$。求 C 的极点。

8. (a) 将 $(\sec x-\cos x)^2$ 表为 $\sec^2 x+p\cos 2x+q$ 的形式，其中 p 及 q 均为常数。

   (b) 利用 (a) 的结果，或其他方法，计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec x-\cos x)^2\mathrm{d}x$。

9. (a) 求 $\int x\ln 2x\,\mathrm{d}x$。

   (b) 考虑曲线 C: $y=\sqrt{x\ln 2x}$，其中$x\geq\frac{1}{2}$。设 R 为 C、x 轴及直线 $x=5$ 围成的区域。

   求 R 绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积。

10. M 为 XY 上的一点使得 $XM:MY=1:2$。设 $\overrightarrow{OX}=\mathbf{x}$ 及 $\overrightarrow{OY}=\mathbf{y}$，其中 O 为原点。
    (a) 以 $\mathbf{x}$ 及 $\mathbf{y}$ 表示 $\overrightarrow{OM}$。
    (b) 已知 $|\mathbf{x}|=2$、 $|\mathbf{y}|=3$ 及 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=2$。利用 (a) 的结果，求 $\left|\overrightarrow{OM}\right|$。

11. 设 $\overrightarrow{OA}=-\mathbf{i}+3\mathbf{j}+3\mathbf{k}$、$\overrightarrow{OB}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ 及 $\overrightarrow{OC}=2\mathbf{j}+5\mathbf{k}$。
    (a) 计算 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$。
    (b) 利用 (a) 的结果，或其他方法，求 OC 与平面 OAB 间的交角。

12. 考虑以下实变数 x, y, z 的线性方程组

(E)： $\begin{cases}3x+y+z=1\\-x+az=b\\2x+y+3z=2\end{cases}$ ，其中 a 及 b 均为实常数。

   (a) 假设 (E) 有唯一解。
      (i) 求 a 值的范围。
      (ii) 以 a 及 b 表 y。
   (b) 假设 (E) 有无限多解。解 (E) 。

13. 设 $A=\begin{pmatrix}6 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ 及 $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$。

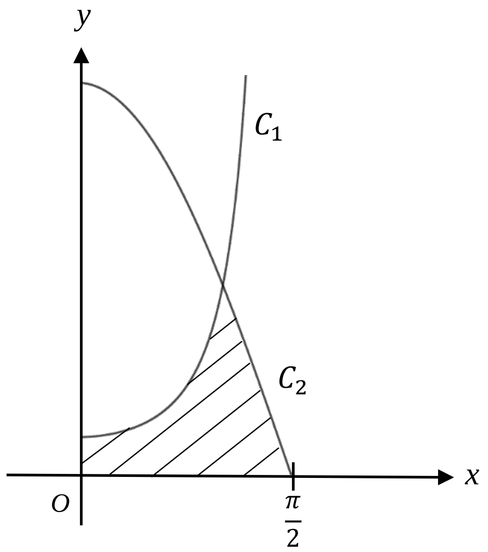
(a) 求 B^{-1}。

(b) 求一矩阵 C 使得 $AB = BC$。

(c) 利用 (b) 的结果，求 A^{100}。

14. (a) 解方程 $\sec^2 x - 8\cos x = 0$，其中$0 \le x < \frac{\pi}{2}$。

(b) 下图显示曲线 C_1: $y = \sec^2 x$ 与曲线 C_2: $y = 8\cos x$ 所围成的阴影区域，其中 O 为原点。求阴影区域的面积。



15. 点 A 及点 B 的坐标分别为 $(-1, 0)$ 及 $(5, 0)$ 。点 C 由原点 O 沿 y 轴向上移动使得 ΔABC 的周界以恒速率每秒 $\frac{1}{7}$ 单位增加。

(a) 求当 $OC = 2\sqrt{6}$ 单位时 OC 的变率。

(b) 设 $\angle ABC = \theta$ 弧度。

(i) 利用 (a) 的结果，求当 $OC = 2\sqrt{6}$ 单位时 θ 的变率。

(ii) 求当 $AC \perp CB$ 时 θ 的变率。